# การประเมินมูลค่าออปชันบนดัชนี S&P 500 โดยใช้แบบจำลองเฮสตัน

# The Options Pricing on S&P 500 Index by Using the Heston Model

*ฆรวัณณ์ วิวัฒนาลำพงษ์* * *ชัยวุฒิ ตั้งสมชัย* **


## บทคัดย่อ

แบบจำลองเฮสตันเป็นแบบจำลองที่ได้รับความนิยมในการหามูลค่าของออปชันอย่างมากเนื่องจากแบบจำลองนี้ได้เข้ามาแก้ไขข้อบกพร่องของแบบจำลองแบล็คและโชลส์ อีกทั้งยังสามารถหาสูตรแบบปิดในการคำนวณมูลค่าของออปชันภายใต้ภายใต้โลกที่เป็นกลางต่อความเสี่ยงหรือเมเชอร์ $\mathbb{Q}$ ในรูปฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ แต่อย่างไรก็ตามการหาค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองเฮสตันนั้นไม่ใช่เรื่องง่ายจึงมีการศึกษาวิธีการหาค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองมีมาตลอดโดยการศึกษานี้จะนำการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของแบบจำลองหรือที่เราเรียกว่าดิฟฟิวชันซึ่งเราสามารถประมาณฟังก์ชันความน่าจะเป็นด้วยทฤษฎีของ Aït-Sahalia (2008) โดยพารามิเตอร์ที่ได้นั้นจะอยู่ภายใต้เมเชอร์ $\mathbb{P}$ แล้วเราได้ทำการแปลงพารามิเตอร์ให้อยู่ภายใต้เมเชอร์ $\mathbb{Q}$ โดยทฤษฎีของ Wiwattanalamphong et al. (2020) ซึ่งศึกษานี้ได้ใช้ดัชนี S&P 500 ดัชนี VIX และสกัดค่าความผันผวนด้วยหลักการอินทิกรัลความผันผวน เพื่อทดสอบและเปรียบเทียบกับมูลค่าออปชันจริงในตลาดและแบบจำลองเฮสตัน



## Abstract

The Heston model is the one of popular models for pricing options value since it can correct some problem of the Black-Scholes model. Moreover, it also proved the closed-form for pricing options value under the risk neutral world or $\mathbb{Q}$-measure. However, the parameters of the Heston model are not easy to find them. Hence, there are studies in this problem. In this paper, we will introduce the maximum likelihood estimation of Aït-Sahalia (2008) to seek these parameters which are under $\mathbb{P}$-measure, then we change the measure to $\mathbb{Q}$-measure by theorem of Wiwattanalamphong et. al. (2020). In the empirical results, we show the testing the estimating method and comparing the options between the theoritical value of Heston model and the market value.


## บทนำ

แบบจำลอง Stochastic Volatility Model (SV Model) เป็นแบบจำลองที่กำหนดให้ความผันผวนของสินทรัพย์อ้างอิงมีการเคลื่อนที่แบบสโตแคสติกเข้ามาแก้ไขสมมติที่ฐานที่กำหนดให้ความผันผวนมีค่าคงที่เพราะความเป็นจริงแล้วมีการศึกษาที่ค้นพบว่าข้อสมมติฐานของแบบจำลอง Black-Scholes (1993) ข้อนี้ไม่ถูกต้อง (Wiggins, 1987) โดย Heston (1993) ได้พัฒนาแบบจำลอง SV model และได้ซึ่งพิสูจน์สูตรแบบปิดของราคาออปชันแบบยุโรปอยู่ในรูปของฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ (Charateristic Function) โดยกำหนดให้ความผันผวนเป็นไปตามแบบจำลองของ Cox et al. (1985)


* นักศึกษาหลักสูตรวิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต สาขาวิชาการเงิน มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

** ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อาจารย์ประจำภาควิชาการเงิน คณะบริหารธุรกิจ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

หรือแบบจำลอง Cox-Ingersoll-Ross (CIR) โดยที่ Wiener Process ของสินทรัพย์อ้างอิงและความแปรปรวนนั้นมีความสัมพันธ์กัน การหาค่าพารมิเตอร์ของแบบจำลองนั้นสำหรับแบบจำลอง Black-Scholes นั้นเราสามารถทำได้อย่างง่ายดายไม่ว่าจะใช้ความผันผวนจากอดีต (Historical Volatility) หรือความผันผวนโดยนัย (Implied Volatility) เป็นต้น แต่แบบจำลอง Heston นั้นมีวิธีการสกัดค่าพารามิเตอร์ออกมาจากหลายรูปแบบ อย่างเช่น Bakshi et al. (1997) ที่สกัดค่าพารามิเตอร์ออกมาจากมูลค่าออปชันในตลาดหรือจะใช้วิธีการประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation; MLE) อย่างการศึกษาของ Aït-Sahalia & Kimmel (2007) เป็นต้น การประมาณค่าพารามิเตอร์หากพิจารณาแล้วจะมีแนวคิดอยู่สองแนวคิดนั่นคือ หากเราสกัดค่าพารามิเตอร์จากราคาออปชันในตลาดโดยตรงพารามิเตอร์แต่ละตัวที่เราได้จะอยู่ภายใต้เมเชอร์ $\mathbb{Q}$ หรือโลกที่เป็นกลางต่อความต่อความเสี่ยง (Risk-neutral World) ดังนั้นเราจะสามารถนำพารามิเตอร์เหล่านี้ไปใช้ในการคำนวณมูลค่าออปชันได้เลย และอีกแนวคิดคือหากเราเชื่อว่าราคาที่แสดงอยู่ในตลาดนั้นเป็นราคาที่ไม่ใช่ราคาที่เป็นกลางต่อความเสี่ยงแล้วเราสกัดข้อมูลจากราคานี้จะทำให้พารามิเตอร์แต่ละตัวที่เราได้จะอยู่ภายใต้เมเชอร์ $\mathbb{P}$ หรือโลกจริง (Real World) เราจึงจำเป็นต้องแปลงค่าพารามิเตอร์เหล่านี้ไปสู่เมเชอร์ $\mathbb{Q}$ เสียก่อนแล้วจึงนำไปคำนวณมูลค่าออปชันได้ (Wiwattanalamphong et al., 2020)

การศึกษาครั้งนี้เราจะใช้วิธีการประมาณพารามิเตอร์โดยใช้ข้อมูลดัชนี S&P 500 ซึ่งอยู่บนเมเชอร์ $\mathbb{P}$ แล้วแปลงพารามิเตอร์เหล่านั้นไปยังเมเชอร์ $\mathbb{Q}$ แล้วประเมินมูลค่าออปชันของดัชนี S&P 500 เพื่อเปรียบเทียบความแม่นยำในการประเมินมูลค่าออปชันของแบบจำลอง Heston โดยเราจะประยุกต์ใช้ทฤษฎีการประมาณพารามิเตอร์ของดิฟฟิวชัน โดยวิธี MLE ของ Aït-Sahalia (2008) ในการหาค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองบนเมเชอร์ $\mathbb{P}$ จากนั้นแปลงค่าพารามิเตอร์ไปยังเมเชอร์ $\mathbb{Q}$ โดยทฤษฎีของ Wiwattanalamphong et. al. (2020) โดยแบบจำลอง Heston นี้ต้องการข้อมูลอีกชุดนึงนอกจากดัชนี S&P 500 นั่นคือค่าความผันผวนเราจึงเลือกใช้ตัวแทน (Proxy) ของความผันผวนของดัชนี S&P 500 2 ตัว คือ Integrated Volatility และดัชนี VIX

## แนวคิดและทฤษฎี

### แบบจำลอง Heston

Heston (1973) ได้ศึกษาแบบจำลอง SV Model เรื่อง A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options โดยกำหนดให้ราคาของสินทรัพย์อ้างอิง ณ เวลา $t$ และความแปรปรวมของราคาเป็นไปตามกระบวนการดิฟฟิวชัน (Diffusion) โดยที่ $W_{1,t}^{\mathbb{P}} \perp\!\!\!\perp W_{2,t}^{\mathbb{P}}$ เป็น $\mathbb{P}$-Standard Wiener Process บน $\mathscr{F}_s$ โดยที่ $0 \leq s \leq t$ ดังนี้

$$d\begin{bmatrix} S_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu S_t \\ \kappa(\gamma - v_t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sqrt{(1-\rho^2)v_t}S_t & \rho\sqrt{v_t}S_t \\ 0 & \sigma\sqrt{v_t} \end{bmatrix} d\begin{bmatrix} W_{1,t}^{\mathbb{P}} \\ W_{2,t}^{\mathbb{P}} \end{bmatrix} \quad (1)$$

สำหรับ $\kappa > 0$ คือ The Mean Reversion Speed for the Volatility, $\gamma > 0$ คือ The Mean Reversion Level for the Volatility, $\sigma > 0$ คือ The Volatility of the Volatility $\rho \in [-1,1]$ คือ ค่าสัมประสิทธ์สหสัมพันธ์ระหว่าง Wiener Process ของราคาและความผันผวน และ $2\kappa\gamma \geq \sigma^2$ คือ Feller’s Condition (Feller, 1951)

จากนั้น Heston (1993) ได้พิสูจน์สูตรในรูปฟังก์ชันลักษณะเฉพาะแล้วเราประยุกต์ใช้การแปลงฟูเรียร์ของ Carr & Madan (1999) โดยมี $\alpha \in \mathbb{R}$ คือ Dampening Parameter จะได้สูตรประเมินมูลค่าคอลออปชันดังนี้

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivk}\psi_{\text{Call}}(v)dv = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi}\mathscr{R}e\left\{\int_{0}^{+\infty} e^{-ivk}\psi_{\text{Call}}(v)dv\right\} \quad 2$$

โดยที่ $\psi_{\text{Call}}(v) = \dfrac{e^{-rT}\phi_H(v-(\alpha+1)i)}{\alpha^2+\alpha-v^2+i(2\alpha+1)v}$ และ $\phi_H$ คือฟังก์ชันลักษณะเฉพาะซึ่งแบบจำลอง Heston (1993)

**การแปลงเมเชอร์และราคาตลาดของความเสี่ยง**

การที่เรามีแบบจำลองบนเมเชอร์ $\mathbb{P}$ อย่างสมการที่ 1 เมื่อจะต้องนำไปใช้ในการประเมินมูลค่าตราสารอนุพันธ์หรือตราสารใดที่ต้องใช้หลักการ Risk-Neutral Pricing นั้นทางคณิตศาสตร์ทางการเงินหรือวิศวกรรมทางการเงินจะทำการแปลงแบบจำลองนั้นไปยังปริภูมิความน่าจะเป็นที่เป็นกลางต่อความเสี่ยงหรือที่เราเรียกว่าเมเชอร์ $\mathbb{Q}$ โดยใช้ Girsanov’s Theorem ซึ่งใช้ฟังก์ชันหนึ่งที่เรียกว่า Adapted Process เป็นฟังก์ชันส่งผ่านแบบจำลองภายใต้เมเชอร์ $\mathbb{P}$ ไปยังเมเชอร์ $\mathbb{Q}$ โดยยังคงคุณสมบัติความเป็น Standard Wiener Process และ Martingale ไว้ด้วย โดยในทางการเงินฟังก์ชันส่งผ่านที่กล่าวนี้เรารู้จักกันในชื่อราคาตลาดของความเสี่ยง (Market Price of Risk) เพราะฉะนั้นแบบจำลอง Heston ซึ่งมีการเคลื่อนที่ไปสองมิติควบคู่กันคือราคาของสินทรัพย์และความผันผวน ดังนั้นจึงมีราคาตลาดของความเสี่ยง 2 ตัว คือ ราคาตลาดของความเสี่ยงของสินทรัพย์ (Market Price of Asset Risk) และราคาตลาดของความเสี่ยงของความผันผวน (Market Price of Volatility Risk) ซึ่งราคาตลาดของความเสี่ยงทั้งสองจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขตาม Wiwattanalamphong et. al. (2020) ดังนี้

$$\sqrt{1-\rho^2}\lambda_{1,t} + \rho\lambda_{2,t} = \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} \quad 3$$

โดยที่ $\lambda_{1,t}$ คือ ราคาตลาดของความเสี่ยงของสินทรัพย์ และ $\lambda_{2,t}$ ราคาตลาดของความเสี่ยงของความผันผวน

Heston (1993) ได้กำหนดฟังก์ชัน $\lambda_{2,t} = \dfrac{\lambda}{\sigma}\sqrt{v_t}$ โดยที่ $\lambda$ คือระดับความเสี่ยงของความผันผวน (Degree of Volatility Risk) และจากงานศึกษาของ Wiwattanalamphong et. al. (2020) ทำให้เราทราบสามารถว่า $\lambda = \eta\rho\sigma$ ภายใต้สมมติฐานตามฟังก์ชัน Iso-elastic Utility Function โดยที่ $\eta \geq 0$ คือระดับการหลีกหนีความเสี่ยงของนักลงทุนในตลาด (Degree of Risk Aversion of Market’s Investor) และหาก $\rho < 0$ แล้ว $0 \leq \eta < -\dfrac{\kappa}{\rho\sigma}$ และถ้า $\rho > 0$ แล้ว $\eta$ จะไม่มีขอบเขตบน (Upper Bound) ดังนั้นสมการที่ 1 เมื่อแปลงแบบจำลองมาสู่เมเชอร์ $\mathbb{Q}$ แล้วจะได้

$$d\begin{bmatrix} S_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rS_t \\ \kappa'(\gamma' - v_t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sqrt{(1-\rho^2)v_t}S_t & \rho\sqrt{v_t}S_t \\ 0 & \sigma\sqrt{v_t} \end{bmatrix} d\begin{bmatrix} W_{1,t}^{\mathbb{Q}} \\ W_{2,t}^{\mathbb{Q}} \end{bmatrix} \quad 4$$

โดยที่ $\kappa' = \kappa + \eta\rho\sigma > 0$ และ $\gamma' = \dfrac{\kappa\gamma}{\kappa + \eta\rho\sigma} > 0$

การประเมินราคาออปชันขึ้นมาจะต้องคำนึงถึงการมีอยู่ของแบบจำลองภายใต้โลกที่ปราศจากความเสี่ยงหรือเมเชอร์ $\mathbb{Q}$ หากเราสร้างแบบจำลองมาแล้วซึ่งโดยทั่วไปจะอยู่บนเมเชอร์ $\mathbb{P}$ แล้วแปลงแบบจำลองไปยังเมเชอร์ $\mathbb{Q}$ ไม่ได้หรือเลือกฟังก์ชันในการแปลงรวมถึงเลือกใช้พารามิเตอร์ที่ไม่เหมาะสมแล้วมูลค่าออปชันที่เราได้จะเป็นมูลค่าที่ส่งผลให้เกิดอาร์บิทราจ (Arbitrage) (Wong & Heyde, 2006; Wiwattanalamphong et al., 2020)

**วิธีการประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation; MLE)**

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองสโตแคสติกด้วยวิธี MLE นั้นเป็นหนึ่งในวิธีที่ได้รับความนิยมในการนำไปใช้งานแต่สำหรับบางแบบจำลองนั้นเราไม่ทราบฟังก์ชันความหนาแน่นของของน่าจะเป็น (Probability Density Function) หรือฟังก์ชัน Likelihood ทำให้การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธี MLE นั้นมีความยุ่งยากซับซ้อน ซึ่งงานศึกษาของ Aït-Sahalia (2008) ได้พิสูจน์สูตรแบบปิดของฟังก์ชัน Log-likelihood ว่าแบบจำลอง Heston เป็นดิฟฟิวชันที่ลดรูปไม่ได้ (Aït-Sahalia & Kimmel, 2007) สมการ Log-likelihood ของดิฟฟิวชันที่ลดรูปไม่ได้คือ

$$\tilde{l}_X^{(J)}(x\,|\,x_0;\Delta) = -\frac{m}{2}\ln(2\pi\Delta) - D_v(x) + \frac{C_X^{(j-1,-1)}(x\,|\,x_0)}{\Delta} + \sum_{k=0}^{J} C_X^{(j_k,k)}(x\,|\,x_0)\frac{\Delta^k}{k!} \qquad 5$$

โดยที่ $m$ คือจำนวนมิติของดิฟฟิวชัน $\Delta$ คือระยะห่างของเวลาของข้อมูลแต่ละตัว $C_X^{(k)}$ คือค่าสัมประสิทธิ์จากการแก้สมการ Kolmogorov $C_X^{(j_k,k)}$ คือค่าสัมประสิทธิ์ที่ประมาณค่าด้วยอนุกรม Hermite รอบจุด $x_0$ ที่อันดับ $j_k = 2(J-k)$ สำหรับ $k = -1,0,\ldots,J$ และ $D_v = \frac{1}{2}\ln(\text{Det}[v(x)])$ โดยที่ $v(x) = \sigma(x)\sigma^T(x)$ วิธีการหาค่าสัมประสิทธิ์ดูได้จากงานวิจัยของ Ait-Sahalia (2008) โดยงานศึกษานี้เราจะใช้การกระจายอันดับที่ $J = 2$

## วิธีการดำเนินการวิจัย

**ข้อมูลที่ใช้ในการศึกษา**

การศึกษานั้นเราจะทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองของทั้งสองแบบจำลองโดยวิธี MLE ของ Aït-Sahalia เพื่อนำไปเปรียบเทียบประสิทธิภาพของในการประเมินมูลค่าออปชันของดัชนี S&P 500 สำหรับแบบจำลอง Black-Scholes เราใช้ข้อมูลดัชนี S&P 500 รายวัน ในช่วงเวลา 24 สิงหาคม 2552 ถึง 24 สิงหาคม 2562 ส่วนแบบจำลอง Heston เราใช้ข้อมูลดัชนีรายวันเช่นเดียวกันแต่ค่าความผันผวนเราเลือกมาสองวิธีคือ Integrated Volatility ซึ่งใช้ข้อมูลดัชนี S&P 500 ในช่วงเวลาเดียวกันแต่เป็นข้อมูลรายนาทีแล้วสกัดออกมาเป็นข้อมูลค่าความผันผวนรายวัน และอีกตัวแทนหนึ่งคือใช้ดัชนี VIX ซึ่งเป็นตัวแทนของความผันผวนของดัชนี S&P 500 ชนิดหนึ่ง ส่วนข้อมูลออปชันเราได้เลือกออปชันแบบยุโรปของดัชนี S&P 500 มาจำนวน 2,350 ตัว ของวันที่ 28 เมษายน พ.ศ. 2563 แบ่งเป็นคอลออปชันจำนวน 1,111 ตัว และพุทออปชันจำนวน 1,239 ตัว และในจำนวนออปชันทั้งหมดนี้สามารถแบ่งตามอายุได้ 6 ช่วงคือ 30, 60, 90, 120, 150, และ 240 วัน โดยเราจะใช้อัตราดอกเบี้ย U.S. Teasury Rate ที่อายุสอดคล้องกับอายุของออปชันแต่ละช่วงอายุโดยถ้าช่วงอายุออปชันไหนที่ไม่มีอัตราดอกเบี้ยที่ตรงกันเราจะใช้อัตราดอกเบี้ยช่วงที่ยาวกว่า เช่นออปชันอายุ 120 วันเราก็ใช้ดอกเบี้ยอายุ 6 เดือน หรือออปชันอายุ 240 วันเราก็ใช้ดอกเบี้ยอายุ 12 เดือนเป็นต้น โดยใช้อัตราดอกเบี้ยดังนี้ 0.10% 0.11% 0.12% 0.12% และ 0.17% ตามลำดับอายุของออปชัน เราแบ่งช่วงของออปชันตามสถานะของออปชัน (Moneyness) ไปอีก 5 ช่วงโดยใช้อัตราส่วนของราคาเริ่มต้นกับราคาใช้สิทธิดังนี้ สำหรับคอลออปชัน $\frac{S_0}{K}$ ถ้าน้อยกว่า 0.94 เป็น Deep-Out-the-Money (DOTM) ถ้าอยู่ระหว่าง 0.94 แต่น้อยกว่า 0.97 เป็น Out-the-Money (OTM) ถ้าอยู่ระหว่าง 0.97 แต่น้อยกว่า 1.03 เป็น At-the-Money (ATM) ถ้าอยู่ระหว่าง 1.03 แต่น้อยกว่า 1.06 เป็น In-the-Money (ITM) และถ้ามากกว่า 1.06 เป็น Deep-In-the-Money (DITM) สำหรับพุทออปชันใช้เกณฑ์ในการแบ่งแบบเดียวกันแต่ใช้อัตราส่วน $\frac{K}{S_0}$

**Integrated Volatility**

การหาค่าความผันผวนโดยผ่านทางราคาหุ้นโดยตรงที่เรียกว่า Integrated Volatility เนื่องจาก $v_t$ คือค่าความผันผวนของราคาหุ้นซึ่งมีพฤติกรรมแบบสโตแคสติก เราจะหาค่าของค่าความผันผวนนี้ ณ เวลา $t$ ต่างๆ โดยผ่านกระบวนการการ

ประมาณค่าจากการกรองข้อมูล (Filtering) ของราคาหุ้นในองค์ประกอบย่อยในตลาด (Market Microstructure) ซึ่งหลักการในการวัดนี้เราจะใช้วิธีสโตแคสติกอินทิกรัล (Stochastic Integral) ซึ่งถูกคำนวนโดยผลรวมกำลังสองของผลตอบแทนของราคาหุ้นแบบความถี่สูง (High-Frequency Stock Return) บนช่วงเวลา $[t_i, t_{i+1}]$ จากข้อมูลระหว่างวัน (Intraday Data) ของดัชนีผ่านวิธีหา Realized Volatility โดยกำหนดให้ $i = \{0,1,\ldots,m\}$ โดยที่ $m \in \mathbb{Z}^+$ คือจำนวนวันของข้อมูลดัชนีที่ต้องการใช้สกัดค่าความผันผวนและให้ $n_i$ จำนวนนาทีในแต่ละวันที่มีการซื้อขายดัชนีแล้ว

$$RV_{t_i,t_{i+1}} = \sum_{k=1}^{n_i} \left[ p_{t_i+\frac{k}{n_i}} - p_{t_i+\frac{(k-1)}{n_i}} \right]^2 \qquad 6$$

โดยที่ $p_t = \ln S_t$ (Barndorff-Nielen & Shephard, 2001b)

## ผลการศึกษา การอภิปรายผลการศึกษาและข้อเสนอแนะ

### ผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง Heston

ผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง Heston ตามตารางที่ 1 เราได้พารามิเตอร์มาสองชุด โดยชุดแรกได้มาจากการสกัดค่าความผันผวนจากดัชนี S&P 500 รายนาทีตั้งแต่วันที่ 24 สิงหาคม 2552 ถึงวันที่ 24 สิงหาคม 2562 ออกมาเป็นข้อมูลความผันผวนรายวันได้จำนวนทั้งหมด 2,516 วันจากข้อมูลดัชนีทั้งหมด 2,517 วัน จากนั้นนำข้อมูลค่าความผันผวนรายวันที่ได้มาจับคู่กับดัชนี S&P 500 รายวัน 2,516 วันเพื่อนำข้อมูลไปสกัดค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองด้วยวิธี MLE และข้อมูลพารามิเตอร์ชุดที่สองเราใช้ข้อมูลดัชนี S&P 500 รายวันคู่กับดัชนี VIX จำนวน 2,517 วันในการสกัดค่าพารามิเตอร์โดยข้อมูลทั้งสองแสดงไว้ในตารางที่ 3 หลังจากที่เราได้พารามิเตอร์สำหรับแบบจำลอง Heston ครบแล้วเราก็จะนำค่าพารามิเตอร์เหล่านี้ไปประเมินออปชันแต่ก่อนหน้านั้นเราจะต้องแปลงค่าพารามิเตอร์ $\kappa$ และ $\gamma$ ไปสู่เมเชอร์ $\mathbb{Q}$ เสียก่อนตามทฤษฎีของ Wiwattanalamphong et. al. (2020) โดยกำหนดให้ $\eta = 1$ เราจะได้ $\kappa' = 21.8608$ และ $\gamma' = 0.1203$ สำหรับ Integrated Volatility และสำหรับดัชนี VIX เราจะได้ $\kappa' = 25.0056$ และ $\gamma' = 0.0.474$ โดยให้ $r$ เป็นค่าอัตราดอกเบี้ย U.S. Teasury Rate ตามอายุของออปชัน หลังจากนั้นเราประเมินมูลค่าออปชันด้วยวิธีการแปลงฟูเรียร์ตามวิธีของ Carr & Madan (1999) แล้วเปรียบเทียบประสิทธิภาพจากการประมาณนี้ได้ผลลัพธ์สำหรับคอลและพุทออปชันตามตารางที่ 2

**ตารางที่ 1** ค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง Heston จากการประมาณด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ Aït-Sahalia (2008) โดยใช้ดัชนี S&P 500 คู่กับ Integrated Volatility (IV) และดัชนี S&P 500 คู่กับดัชนี VIX

| Parameter | IV | VIX Index |
|---|---|---|
| $\mu$ | 0.1266 | -0.2328 |
| $\kappa\gamma$ | 2.6294 | 1.1852 |
| $\kappa$ | 22.1004 | 25.9466 |
| $\sigma$ | 1.5193 | 1.1756 |
| $\rho$ | -0.1577 | -0.8004 |

ตารางที่ 2 เราได้เปรียบเทียบระหว่างการประเมินมูลค่าคอลออปชันโดยแบบจำลอง Heston โดยใช้ดัชนี S&P 500 คู่กับ Integrated Volatility และดัชนี VIX จะเห็นว่า Integrated Volatility ในช่วง DOTM นั้นมี MPE ที่ค่อนข้างสูงโดยเฉลี่ยแล้วการประเมินคอลออปชันในช่วงนี้ต่ำกว่ามูลค่าจริงในตลาดแต่ตรงกันกับการใช้ดัชนี VIX ที่ให้ค่า MPE เป็นบวก

โดยการประเมินมูลคอลออปชันของแบบจำลอง Heston ที่มีแนวโน้มให้ค่าผิดพลาดน้อยที่สุดคือช่วง ATM เพราะไม่ว่าค่า RMSE ที่ทุกช่วงอายุของคอลออปชันจะต่ำแล้วยังมีค่า MPE ที่ต่ำด้วยโดยเฉพาะช่วงคอลออปชันที่อายุ 30 วัน ในทำนองเดียวกันตารางที่ 2 ได้ให้ผลการทดสอบของพุทออปชันแบบเดียวกับคอลออปชันจะเห็นว่าในช่วง DITM นั้นมีค่า RMSE ที่สูงกว่าช่วงอื่น ๆ หมายความว่าการประเมินมูลค่าพุทออปชันในช่วงนี้ประสิทธิภาพไม่ค่อยดีนัก เช่นเดียวกันกับคอลออปชันแบบจำลอง Heston มีแนวแนวโน้มให้ค่าผิดพลาดในการประเมินมูลค่าพุทออปชันน้อยที่สุดคือช่วง ATM

ตารางที่ 2 ประสิทธิภาพการประเมินมูลค่าคอลและพุทออปชันโดยใช้พารามิเตอร์ที่ได้จากดัชนี S&P 500 คู่กับ Integrated Volatility (IV) และดัชนี S&P 500 คู่กับดัชนี VIX

| Moneyness | | Time to Maturity (Days) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 30 | | | | 60 | | | | 90 | | | | 120 | | | | 150 | | | | 240 | | | |
| | | Call | | Put | | Call | | Put | | Call | | Put | | Call | | Put | | Call | | Put | | Call | | Put | |
| | | IV | VIX | IV | VIX | IV | VIX | IV | VIX | IV | VIX | IV | VIX | IV | VIX | IV | VIX | IV | VIX | IV | VIX | IV | VIX | IV | VIX |
| DOTM | RMSE | 9.97 | 3.58 | 9.68 | 12.83 | 19.38 | 8.25 | 28.71 | 39.06 | 33.21 | 16.45 | 49.21 | 67.35 | 56.47 | 19.87 | 51.68 | 131.64 | 54.10 | 15.60 | 109.81 | 81.83 | 79.04 | 16.08 | 50.76 | 87.56 |
| | MPE (%) | -306.92 | 82.22 | 76.64 | 85.34 | -364.30 | 79.01 | 68.55 | 84.86 | -434.22 | 59.43 | 62.75 | 83.39 | -331.04 | 21.65 | 64.59 | 84.75 | -631.03 | 37.09 | 57.31 | 82.73 | -799.46 | 19.93 | 48.62 | 82.01 |
| OTM | RMSE | 14.58 | 13.15 | 17.61 | 29.75 | 23.65 | 28.07 | 38.88 | 69.11 | 31.02 | 40.54 | 38.86 | 83.91 | 86.71 | 42.46 | 56.02 | 106.61 | 59.42 | 33.40 | 60.72 | 129.68 | 72.77 | 45.33 | 18.89 | 86.54 |
| | MPE (%) | -51.20 | 38.43 | 16.96 | 43.81 | -33.86 | 38.20 | 18.62 | 50.98 | -31.28 | 35.94 | 14.36 | 49.85 | -174.90 | -39.91 | 10.46 | 48.02 | -43.37 | 23.10 | 17.87 | 52.67 | -39.16 | 24.28 | -7.87 | 37.71 |
| ATM | RMSE | 9.61 | 26.92 | 57.45 | 63.89 | 13.14 | 39.96 | 28.59 | 59.33 | 39.60 | 50.92 | 124.62 | 154.05 | 39.36 | 53.65 | 94.58 | 147.14 | 55.99 | 42.71 | 32.76 | 105.91 | 55.63 | 59.24 | 84.10 | 156.18 |
| | MPE (%) | -1.01 | 26.40 | -4.58 | 21.38 | -6.92 | 27.74 | 2.58 | 32.91 | -23.36 | 17.94 | 2.90 | 35.48 | -17.83 | 23.61 | 11.17 | 41.95 | -29.31 | 17.72 | 5.88 | 39.75 | -21.87 | 23.03 | 0.62 | 36.91 |
| ITM | RMSE | 18.15 | 27.38 | 90.82 | 106.20 | 24.35 | 37.67 | 144.85 | 173.40 | 109.70 | 77.37 | 196.84 | 237.13 | 97.72 | 58.93 | 177.42 | 240.42 | 61.86 | 31.00 | 41.95 | 109.07 | 120.20 | 46.72 | 54.99 | 82.44 |
| | MPE (%) | 0.79 | 4.66 | 6.11 | 13.25 | -2.01 | 5.56 | 5.35 | 15.99 | -51.00 | -31.20 | 0.46 | 14.52 | -23.47 | -7.30 | 13.79 | 26.01 | -14.74 | 4.63 | 0.45 | 7.77 | -20.00 | -2.11 | -8.77 | 14.27 |
| DITM | RMSE | 166.08 | 165.41 | 186.97 | 189.93 | 183.23 | 180.07 | 266.75 | 277.73 | 246.88 | 236.69 | 240.58 | 245.71 | 224.97 | 205.32 | 263.62 | 317.91 | 179.78 | 165.33 | 241.33 | 259.66 | 258.08 | 238.13 | 273.35 | 330.41 |
| | MPE (%) | -27.81 | -26.62 | -22.59 | -18.82 | -33.28 | -29.16 | -17.64 | -11.08 | -73.25 | -64.36 | -45.69 | -31.78 | -83.11 | -69.31 | 27.56 | 40.35 | -29.97 | -20.09 | 2.58 | 14.31 | -42.67 | -31.57 | 12.73 | 24.58 |

**การอภิปรายผลการศึกษาและข้อเสนอแนะ**

การวิจัยนี้ได้ใช้องค์ความรู้และต่อยอดมาจากงานวิจัยของ Wiwattanalamphong et al. (2020) ที่ได้ใช้ความรู้ทางทฤษฎีทางคณิตศาสตร์และการเงินมาต่อยอดแบบจำลอง Heston ที่ทำให้เราได้รู้ว่าตัวเลือกของฟังก์ชันที่เราเรียกว่าราคาของความเสี่ยงนั้นมีหน้าตาอย่างไรและให้สูตรในการคำนวณค่า $\lambda$ ที่มีความเกี่ยวข้องกับระดับการหลีกหนีความเสี่ยงของนักลงทุนทั้งหมดที่อยู่ในสินทรัพย์นั้นเพื่อที่จะปรับพารามิเตอร์ของแบบจำลอง Heston ไปสู่เมเชอร์ $\mathbb{Q}$ ซึ่งภายใต้เมเชอร์นี้เราจะสามารถคำนวณมูลค่าออปชันตามแบบจำลอง Heston ด้วยฟังก์ชันลักษณะเฉพาะและวิธีของ Carr & Madan (1999) หรือที่เราเรียกว่าวิธีแปลงฟูเรียร์อย่างเร็ว จากนั้นเราใช้ทฤษฎีของ Aït-Sahalia (2008) ในการประมาณค่าพารมิเตอร์ของแบบจำลอง ตัวอย่างการทดสอบของการศึกษาวิจัยครั้งนี้คือออปชันบนดัชนี S&P 500 เนื่องจากในแบบจำลอง Heston เราจะสร้างตัวแทนความผันผวนขึ้นมาซึ่งจำเป็นต้องใช้ข้อมูลที่มีความถี่สูง (High-Freqeuncy Data) รายนาที และเปรียบเทียบกับดัชนี VIX ทำให้เราได้พารามิเตอร์ของแบบจำลอง Heston มา 2 ชุด คือ พารามิเตอร์จากข้อมูลดัชนี S&P 500 คู่กับ Integrated Volatility และดัชนี S&P 500 คู่กับดัชนี VIX เมื่อได้พารามิเตอร์มาเรานำพารามิเตอร์ไปปรับให้พารามิเตอร์อยู่ภายใต้เมเชอร์ $\mathbb{Q}$ แล้วนำไปประเมินมูลค่าออปชันทั้งคอลและพุทออปชันแล้วเปรียบเทียบกับราคาออปชันจริงในตลาด การศึกษานี้ได้ข้อสรุปว่าแบบจำลอง Heston สามารถประเมินมูลค่าคอลและพุทออปชันได้ดีในช่วง ATM การศึกษาครั้งนี้มีข้อจำกัดเกี่ยวกับตัวแปรค่าระดับการหลีกหนีความเสี่ยงที่กำหนดให้เป็น 1 ($\eta = 1$) หากเราสามารถหาค่าที่แท้จริงของตัวแปรนี้ได้นั้นอาจจะส่งผลให้เราได้การประเมินราคาออปชันทางทฤษฎีที่ใกล้เคียงกว่าผลการศึกษาครั้งนี้

**บรรณานุกรม**


Aït-Sahalia, Y. (2008). Closed-form likelihood expansions for multivariate diffusions. *The Annals of Statistics, 36*(2), 906-937.

Aït-Sahalia, Y., & Kimmel, R. (2007). Maximum-likelihood estimation of stochastic volatility models. *Journal of Financial Economics. 83*, 413-452.

Bakshi, G., & Cao, C., & Chen, Z. (1997). Empirical performance of alternative option pricing models. *Journal of Finance*, *52*, 2003-2049.

Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, *81*(3), 637-654.

Carr, P., & Madan, D. B. (1999). Option valuation using the fast Fourier transform. *Journal of Computational Finance*, *2*, 61-73.

Cox, J.C., & Ingersoll, J.E. & Ross, S.A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, *53*, 385-407

Feller, W. (1951). Two sigular diffusion problems. *Annals of Mathematics*, *54*, 173-182.

Girsanov, I. (1960). On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures. *SIAM Theory of Probability and Application*, *5*(3), 285-301.

Heston, S. (1993). A Closed Solution for Options with Stochastic Volatility, with Application to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*, *6*(2), 327–343.

Rubinstein, M. (1985). Nonparametric Test of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978. *Journal of Finance*, *40*, 455-480.

Stein, E. M., & Stein, J. C. (1991). Stock Price Distribution with Stochastic Volatility: Analytic Approach. *Review of Financial Studies*, *4*, 727-752.

Wiggins, J. B. (1987). Option Values under Stochastic Volatilities. *Journal of Financial Economics*, *19*, 351-372.

Wiwattanalamphong, K., & Phetpradap, P., & Tangsomchai, C. (2020). Existence of Price of Volatility Risk of Heston Model under Iso-Elastic Utility Function. *Thai Journal of Mathematics* (Submitted).

Wong, B. & Heyde, C. C. (2006). On changes of measure in stochastic volatility models. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, *2006*, 1–13.